Esame di Elementi di Fisica Teorica
Corso di Laurea in Scienza dei Materiali
Sessione Invernale 25/01/2018

Problema 1

Determinare autostati e autovalori dell'operatore

$$\hat{A} = a(2|\uparrow><\uparrow| - 2|\downarrow><\downarrow| + |\downarrow><\uparrow| + |\uparrow><\downarrow|) \tag{1}$$

dove $<\uparrow||\uparrow>=<\downarrow||\downarrow>= 1$ e $<\uparrow||\downarrow>= 0$ e a è una costante positiva.

Dire quali sono i possibili risultati di una misura di

$$\hat{B} = b\,(3|\uparrow><\uparrow| + |\downarrow><\downarrow| + (2+i)|\downarrow><\uparrow| + (2-i)|\uparrow><\downarrow|) \tag{2}$$

(b è una costante positiva) e per ognuno di essi la probabilità di trovarsi nell'autostato di $\hat{A}$ con autovalore massimo.

Problema 2

All'istante $t = 0$ un oscillatore armonico unidimensionale si trova nello stato

$$|\Psi>= \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2|1> +|0>) \tag{3}$$

Calcolare i valori medi della posizione e della quantità di moto in funzione del tempo e confrontarli con gli analoghi classici; fare lo stesso per l'energia totale e discutere il significato fisico dei risultati ottenuti.

Problema 3

Si consideri un atomo di idrogeno, trascurando completamente gli effetti relativistici e di spin.
Sulla base del seguente insieme di dati :

— l'atomo si trova nel suo primo stato eccitato;
— il valore m_z di L_z è noto con certezza;

Esprimere L^2 in termini di L_x, L^+ ed L^-. Determinare quindi il valor medio di L^2 per i vari valori possibili di m_z.

Soluzione Esame 25/01/2018

Problema 1

Risolvo l'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{A}$: $\hat{A} - \lambda \mathbb{1} = 0$. Trovo i seguenti autovalori :

$$\lambda_A^+ = +\sqrt{5}a \tag{4}$$
$$\lambda_A^- = -\sqrt{5}a \tag{5}$$

A cui corrispondono i seguenti autovettori :

$$|v_A^+ >= \frac{1}{N_A^+} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$
$$|v_A^- >= \frac{1}{N_A^-} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

rispettivamente autovettore con autovalore massimo e minimo. N_A^+ e N_A^- sono le norme dei due autovettori che valgono

$$N_A^+ = \sqrt{10+4\sqrt{5}} \tag{8}$$
$$N_A^- = \sqrt{10-4\sqrt{5}} \tag{9}$$

Risolvo l'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{B}$: $\hat{B} - \lambda \mathbb{1} = 0$. Trovo i seguenti autovalori :

$$\lambda_B^+ = +(2+\sqrt{6})b \tag{10}$$
$$\lambda_B^- = (2-\sqrt{6})b \tag{11}$$

A cui corrispondono i seguenti autovettori :

$$|v_B^+ >= \frac{1}{N_B^+} \begin{pmatrix} \frac{2-i}{-1+\sqrt{6}} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$
$$|v_B^- >= \frac{1}{N_B^-} \begin{pmatrix} \frac{2-i}{-1-\sqrt{6}} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

N_B^+ e N_B^- sono le norme dei due autovettori che valgono

$$N_B^+ = \frac{\sqrt{12-2\sqrt{6}}}{-1+\sqrt{6}} \tag{14}$$
$$N_B^- = \frac{\sqrt{12+2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{6}} \tag{15}$$

Posso quindi calcolare le probabilità $P_1 = \left|< v_B^+|v_A^+ >\right|^2$ e $P_2 = \left|< v_B^-|v_A^+ >\right|^2$.

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6-\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{5+2\sqrt{5}} \left(22 + 8\sqrt{5} + 3\sqrt{6} + 2\sqrt{30}\right) \tag{16}$$
$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6+\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{5+2\sqrt{5}} \left(22 + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{30}\right) \tag{17}$$

Si verifica che $P_1 + P_2 = 1$.

Problema 2 L'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale in termini degli operatori di creazione e distruzione è

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a^\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

e il generico $|n>$ è autostato dell'Hamiltoniana di autovalore $E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2)$. L'evoluzione temporale dello stato 3 si ottiene applicando ad esso l'operatore di evoluzione temporale $\hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right)$ ottenendo

$$|\Psi(t)> = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 \cdot e^{\left(-i\hat{E}_1 t/\hbar\right)}|1> + e^{\left(-i\hat{E}_0 t/\hbar\right)}|0>\right) \tag{19}$$

Poiché si ha che

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a^\dagger + \hat{a}\right) \tag{20}$$
$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(a^\dagger - \hat{a}\right) \tag{21}$$

otteniamo che i valori medi dipendente dal tempo dei due operatori sono i seguenti

$$< \Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t) > = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\cos(\omega t) \tag{22}$$
$$< \Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t) > = -\frac{2}{5}\sqrt{2\hbar m\omega}\sin(\omega t) \tag{23}$$

Allo stesso modo, usando l'espressione dell'Hamiltoniana si dimostra che

$$< \Psi(t)|\hat{H}|\Psi(t) > = \frac{13}{10}\hbar\omega \tag{24}$$

Quindi, nel caso dell'oscillatore armonico l'equazioni a cui obbediscono i valori medi di posizione e momento, sono identiche alle equazioni per posizione e momento di un oscillatore classico. Il valore medio dell'energia è una costante del moto.

Problema 3

L'informazione che l'atomo di H si trova nel suo primo stato eccitato ci permette di ridurre lo stato del sistema alla generica combinazione nella base n, l, m nei quattro stati : $|2,0,0>, |2,1,-1>, |2,1,0>$ e $|2,1,-1>$.

Il dato poi, che il valore di L_z è noto con certezza limita la scelta alle sole combinazione dei suddetti vettori, che siano anche autovettori di L_z

$$\Psi_{-1} = |2,1,-1> \Rightarrow m_z = -1 \tag{25}$$

$$\Psi_0 = a|2,0,0> + b|2,1,0> \Rightarrow m_z = 0 \tag{26}$$

$$\Psi_1 = |2,1,1> \Rightarrow m_z = 1 \tag{27}$$

Per gli stati Ψ_{-1} e Ψ_1, essendo essi autostati di L^2, si ha $L^2 = 2\hbar^2$. Nel caso invece di Ψ_0 $L^2 = 2b\hbar^2$.